

VARIÉTÉS ABÉLIENNES ET INVARIANTS ARITHMÉTIQUES

JEAN GILLIBERT

1. INTRODUCTION

Soient R un anneau de Dedekind excellent, de corps de fractions K , et $S = \text{Spec}(R)$. On considère un S -schéma en groupes commutatif G , fini et plat sur S , et l'on note G^D le dual de Cartier de G . Nous disposons d'un homomorphisme

$$\pi : H^1(S, G^D) \longrightarrow \text{Pic}(G)$$

explicité en premier par Waterhouse (voir [W], Theorem 5). Si l'on considère que la notion de torseur (sous un schéma en groupes fini) généralise celle d'extension galoisienne, alors on peut dire que π mesure la structure galoisienne des G^D -torseurs, le groupe $\text{Pic}(G)$ étant identifié à un groupe de classes (voir [CN-T]).

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la construction de G^D -torseurs dont l'image par π est triviale, c'est-à-dire de torseurs dont la structure galoisienne est triviale. Plus précisément, supposons que G soit un sous-groupe d'un S -schéma abélien A . Soit $B := A/G$ le schéma abélien quotient, et soit A^t (resp. B^t) le schéma abélien dual de A (resp. B). Alors (par dualité) nous avons une suite exacte (de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S)

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow B^t \longrightarrow A^t \longrightarrow 0$$

qui donne lieu, par application du foncteur des sections globales, à un morphisme cobord $\partial : A^t(S) \rightarrow H^1(S, G^D)$. Nous obtenons ainsi un homomorphisme $\psi := \pi \circ \partial$, introduit en premier (dans le cas où $G = A[n]$ et où R est l'anneau des entiers d'un corps de nombres) par M. J. Taylor [T88], et que l'on appelle usuellement *class-invariant homomorphism*. Srivastav et Taylor [S-T], puis Agboola [A2], et enfin Pappas [P] ont montré que, si A est une courbe elliptique et si l'ordre de G est premier à 6, alors les points de torsion de $A^t(S)$ appartiennent au noyau de ψ .

Dans [G], l'auteur a généralisé la construction de ψ dans le cas où G est un sous-groupe fini et plat d'un S -schéma en groupes semi-stable, ainsi que le résultat d'annulation sur les points de torsion (dans le cas d'une courbe elliptique semi-stable, en supposant l'ordre de G premier à 6).

Notre but est d'étendre cette construction dans le cadre suivant : soient \mathcal{A} le modèle de Néron d'une K -variété abélienne semi-stable, \mathcal{A}° la composante neutre de \mathcal{A} , Γ un sous-groupe (*i.e.* un sous-schéma en groupes ouvert) de $\Phi := \mathcal{A}/\mathcal{A}^\circ$ (quotient pour la topologie fppf sur S) et G un sous-groupe fermé, quasi-fini et plat de \mathcal{A}^Γ (où \mathcal{A}^Γ désigne l'image réciproque de Γ dans \mathcal{A}). Nous définissons (paragraphe 3.2) un homomorphisme ψ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) qui se factorise de la façon suivante

$$\mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}(G),$$

où Γ' est l'orthogonal de Γ sous l'accouplement de monodromie défini par Grothendieck (voir le paragraphe 2.2), et où π est un homomorphisme qui généralise celui de Waterhouse (voir le paragraphe 3.1).

Signalons ici que l'application $\Gamma \mapsto \mathcal{A}^\Gamma$ réalise une bijection entre l'ensemble des sous-groupes ouverts de Φ et l'ensemble des modèles semi-stables de \mathcal{A}_K .

Du point de vue technique, la principale différence avec la situation considérée dans [G] est l'absence de dual de Cartier naturel pour le schéma en groupes G . Cependant, on donne ici une preuve de la nullité du faisceau $\underline{\text{Ext}}_S^1(G, \mathbf{G}_m)$ pour la topologie fppf (voir le lemme 2.3). Ce résultat, qui nous a été communiqué par L. Moret-Bailly, nous permet de généraliser de façon naturelle les constructions précédentes.

Travailler avec des groupes quasi-finis permet de reformuler le résultat d'annulation de ψ démontré dans [G]. Ainsi on peut énoncer, comme corollaire du théorème 4.1 de [G], le résultat suivant (voir le paragraphe 5.1) :

Théorème 1.1. *Soit \mathcal{E} le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K , et soit $m > 0$ un entier naturel premier à 6. Alors les homomorphismes*

$$\mathcal{E}^t(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{E}^\circ[m], \mathbf{G}_m)) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}(\mathcal{E}^\circ[m])$$

(associé à $\mathcal{E}^\circ[m] \subseteq \mathcal{E}^\circ$), et

$$\mathcal{E}^{t,\circ}(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{E}[m], \mathbf{G}_m)) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}(\mathcal{E}[m])$$

(associé à $\mathcal{E}[m] \subseteq \mathcal{E}$) s'annulent sur les points de torsion.

Remarque 1.2. On constate que les groupes $\mathcal{E}^\circ[m]$ et $\mathcal{E}[m]$ sont affines (paragraphe 2.3). D'autre part, si les points de m -torsion de \mathcal{E}_η sont tous K -rationnels, alors le groupe $\mathcal{E}[m]$ est fini et plat sur S ([G], prop. 3.6), donc $\underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{E}[m], \mathbf{G}_m) = \mathcal{E}[m]^D$ est le dual de Cartier de $\mathcal{E}[m]$. Par contre, si \mathcal{E} n'a pas partout bonne réduction, $\mathcal{E}^\circ[m]$ n'est jamais un groupe fini, sauf pour $m = 1$, valeur pour laquelle il est nul (voir la remarque 3.10).

L'un des objectifs de ce travail est de « passer à la limite » dans l'étude de ψ . Supposons que K soit un corps de nombres, et que R soit l'anneau des entiers de K . Sous ces hypothèses, nous introduisons (cf. section 4) une version arakélovienne $\hat{\psi}$ de notre homomorphisme (généralisant celle introduite par Agboola et Pappas dans [A-P]) : soit ℓ un nombre premier, on note alors

$$\hat{\Psi}_\ell = \varprojlim \hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \varprojlim \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$$

la flèche obtenue par passage à la limite projective de l'homomorphisme $\hat{\psi}_{\ell^n}$ associé à l'inclusion $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] \subseteq \mathcal{A}^\circ$ (cf. paragraphe 5.2). Soient $\text{disc}(K/\mathbb{Q})$ le discriminant de K/\mathbb{Q} , et $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de \mathcal{A} . Les résultats de [A-P] impliquent alors le résultat qui suit :

Théorème 1.3. *L'homomorphisme $\hat{\Psi}_\ell$ est injectif modulo les points de torsion. En outre, si tous les points de S de caractéristique ℓ sont contenus dans U , et si ℓ ne divise pas $6 \cdot \text{disc}(K/\mathbb{Q})$, alors $\hat{\Psi}_\ell$ est injectif.*

Remarque 1.4. Supposons que, pour toute place v de mauvaise réduction de \mathcal{A} , ℓ ne divise pas l'ordre de Φ_v . Alors nous avons $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] = \mathcal{A}[\ell^n]$ pour tout entier n , ce qui permet d'exprimer plus simplement l'ensemble d'arrivée de $\hat{\Psi}_\ell$.

Remarque 1.5. Philippe Cassou-Noguès et Martin Taylor ont remarqué une analogie entre l'annulation de ψ sur les points de torsion et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (voir la remarque 5.8 de [T91] ainsi que les commentaires qui suivent le théorème 4 de [CN-T]). Soit à présent $\Psi_\ell : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \rightarrow \varprojlim \text{Pic}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$ le morphisme déduit de $\hat{\Psi}_\ell$ par oubli des métriques. Les remarques précédentes suggèrent un lien entre l'injectivité de Ψ_ℓ sur les points d'ordre infini et la conjecture de Birch et Swinerton-Dyer ℓ -adique.

Remarquons que, si \mathcal{A} est une courbe elliptique à multiplication complexe, ayant partout bonne réduction sur K et réduction ordinaire en ℓ , alors l'injectivité de Ψ_ℓ modulo les points de torsion a été démontrée (sous certaines hypothèses) par Agboola et Taylor (voir [A-T] ou le théorème 6 de [CN-T]).

Remerciements. Je remercie Laurent Moret-Bailly pour m'avoir communiqué la preuve du lemme 2.3, à la lumière duquel cet article a été largement remanié, ainsi que pour sa relecture de l'ensemble du texte. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers John Boxall pour l'encadrement de ma thèse, dont ce travail est issu.

2. PROBLÈMES D'EXACTITUDE

Rappelons les notations qui seront en vigueur tout au long de cet article : R est un anneau de Dedekind excellent, de corps de fractions K . Soit $S = \text{Spec}(R)$ et soit η le point générique de S . Nous noterons \mathbf{G}_m le groupe multiplicatif sur S .

On dit qu'un S -schéma en groupes est semi-stable s'il est commutatif, lisse, séparé, et si les composantes neutres de ses fibres sont extensions de variétés abéliennes par des tores.

On fixe une fois pour toutes un S -schéma en groupes semi-stable A dont la fibre générique A_η est une variété abélienne. On notera $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de A , de sorte que A_U est un U -schéma abélien.

2.1. Isogénies duales sur le petit site fppf. Supposons que l'on se donne un épimorphisme (fppf) $f : A \rightarrow B$ entre S -schémas en groupes semi-stables, tel que $f_\eta : A_\eta \rightarrow B_\eta$ soit une isogénie. Alors $\ker f$ est un S -schéma en groupes plat et quasi-fini (voir [BLR], §7.3, lemma 1). De plus, nous avons un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow{e} & B \end{array}$$

où $e : S \rightarrow B$ désigne la section unité, qui est une immersion fermée car B est séparé. Par suite, $\ker f \rightarrow A$ est une immersion fermée.

Réciproquement, soit G un sous- S -schéma en groupes fermé, quasi-fini et plat de A . Le lemme suivant montre que G s'inscrit dans une suite exacte.

Lemme 2.1. *Le faisceau quotient A/G , pour la topologie fppf sur S , est représentable par un S -schéma en groupes semi-stable.*

Démonstration. Le faisceau quotient A/G est représentable ([An], chap. IV, théorème 4.C) par un S -schéma en groupes, que nous noterons B (on se sert du fait que A est de type fini sur S , et S régulier de dimension ≤ 1). La projection canonique $\varphi : A \rightarrow B$ est fidèlement plate, et A est un S -schéma plat, donc B est un S -schéma plat. De plus B est lisse sur S

grâce au critère de lissité par fibres ([BLR], §2.4, prop. 8). Enfin, les composantes neutres des fibres de B sont extensions de variétés abéliennes par des tores. \square

Ainsi nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S . De plus, la restriction $\varphi_U : A_U \rightarrow B_U$ est une isogénie entre U -schémas abéliens. Il existe alors une isogénie duale $\varphi_U^t : B_U^t \rightarrow A_U^t$, dont le noyau est le dual de Cartier G_U^D de G_U . Ici, A_U^t et B_U^t désignent les U -schémas abéliens duaux de A_U et B_U respectivement.

Nous voulons prolonger l'isogénie duale φ_U^t en un morphisme de faisceaux sur S , pour cela nous allons nous servir du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbf{G}_m)$ et de ses dérivés. Dans cette optique, le gros site fppf ne nous convient pas, car le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbf{G}_m)$ n'est pas nul. Nous allons donc utiliser un autre site, qui nous permettra d'énoncer le lemme 2.2.

Plus précisément, nous considérons le « petit site fppf » sur S (resp. sur U), c'est-à-dire la catégorie des schémas plats sur S (resp. sur U) munie d'une structure de site pour la topologie fppf. Nous appellerons faisceau (pour la topologie fppf) sur S (resp. sur U) un faisceau sur ce site.

Nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_S$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_U$) le faisceau des homomorphismes de faisceaux abéliens, restreint au petit site fppf sur S (resp. sur U).

Soit $j : U \rightarrow S$ l'inclusion, et soit j^* le foncteur « image inverse » de faisceaux correspondant. La flèche $j : U \rightarrow S$ étant un objet du petit site fppf sur S , le foncteur j^* est un « foncteur de localisation » (voir [SGA 4], exposé IV, paragraphes 5.1 à 5.4).

En particulier, il en résulte que l'image par j^* d'un faisceau représentable (disons par un S -schéma plat Y) est représenté par le U -schéma $Y_U := Y \times_S U$. D'autre part, si F_1 et F_2 sont deux faisceaux abéliens sur S , la flèche canonique

$$j^*(\underline{\mathrm{Hom}}_S(F_1, F_2)) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_U(j^*F_1, j^*F_2)$$

est un isomorphisme (voir [SGA 4], exposé IV, prop. 12.3, b), p. 502). De plus, j^* est exact et admet un adjoint à gauche $j_!$ exact. Par suite, j^* envoie les injectifs sur des injectifs (voir [SGA 4], exposé V, paragraphe 2.2). Nous dérivons alors des deux côtés de la flèche et obtenons un isomorphisme $j^*(\underline{\mathrm{Ext}}_S^1(F_1, F_2)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_U^1(j^*F_1, j^*F_2)$. En particulier, soit Y un S -schéma en groupes plat tel que Y_U soit un U -schéma abélien, alors nous obtenons un isomorphisme

$$(1) \quad j^*(\underline{\mathrm{Ext}}_S^1(Y, \mathbf{G}_m)) \simeq Y_U^t$$

où Y_U^t est le schéma abélien dual de Y_U . On se sert ici du fait que $\underline{\mathrm{Ext}}_U^1(Y_U, \mathbf{G}_m)$ est isomorphe à Y_U^t (voir [SGA 7], exposé VII, 2.9.5 et 2.9.6).

Nous avons le résultat suivant (voir [G], lemme 2.2) :

Lemme 2.2. *Soit Y un S -schéma en groupes plat, dont la fibre générique Y_η est une variété abélienne. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, \mathbf{G}_m)$ est nul.*

D'autre part, nous devons à L. Moret-Bailly la démonstration du lemme qui suit (laquelle dépend du fait que S est régulier de dimension ≤ 1).

Lemme 2.3 (L. Moret-Bailly). *Soit G un schéma en groupes (commutatif) plat, séparé et quasi-fini sur S . Alors $\underline{\mathrm{Ext}}_S^1(G, \mathbf{G}_m)$ est nul.*

Démonstration. On peut supposer S local hensélien. Le groupe G étant quasi-fini et séparé sur S , il admet un plus grand sous-groupe ouvert et fermé H fini sur S (voir [SGA 7], exposé IX, 2.2.3). De plus, la platitude de G entraîne celle de H . Le quotient G/H est alors étale sur S (sa section unité est ouverte), de fibre spéciale nulle. Sa fibre générique est donc un K -schéma en groupes (automatiquement séparé) fini étale. On en déduit que G/H est lui-même plat, quasi-fini et séparé sur S . Le groupe H étant fini et plat sur S , nous avons $\underline{\mathrm{Ext}}_S^1(H, \mathbf{G}_m) = 0$ (voir [SGA 7], exposé VIII, 3.3.1). Ainsi on se ramène au cas où G est étale, à fibre spéciale nulle.

Soit Ω une extension de G par \mathbf{G}_m . On remarque que G_K et la section unité de G forment un recouvrement ouvert de G . Donc trivialisier l'extension Ω équivaut à trivialisier sa fibre générique (extension de G_K par $\mathbf{G}_{m,K}$). Une telle trivialisatation existe après extension finie de K , donc après revêtement fini et plat de S , d'où le résultat. \square

A présent, nous considérons la suite

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

comme étant une suite exacte de faisceaux sur le petit site fppf de S .

Nous obtenons, en appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(-, \mathbf{G}_m)$ à cette suite, une (longue) suite exacte de cohomologie

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(A, \mathbf{G}_m) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m) \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(B, \mathbf{G}_m) \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(A, \mathbf{G}_m) \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(G, \mathbf{G}_m)$$

dont les termes sont des faisceaux abéliens sur S . Le premier terme est nul, d'après le lemme 2.2, ainsi que le dernier terme, d'après le lemme 2.3. Ainsi nous obtenons une suite exacte

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(B, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\varphi^*} \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(A, \mathbf{G}_m) \longrightarrow 0.$$

D'après ce qui précède (voir (1)), son image par le foncteur j^* est la suite

$$0 \longrightarrow G_U^D \longrightarrow B_U^t \xrightarrow{\varphi_U^t} A_U^t \longrightarrow 0.$$

Cette dernière admet donc un « prolongement » sur S .

Par application du foncteur des sections globales, nous pouvons déduire de la suite (2) un morphisme cobord

$$\delta : \underline{\mathrm{Ext}}_S^1(A, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)).$$

Nous allons voir à présent comment la théorie des biextensions permet d'éclaircir les choses en construisant explicitement des sections du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}_S^1(A, \mathbf{G}_m)$.

2.2. Biextensions et faisceau image. Soit \mathcal{A} le modèle de Néron de A_η . Alors, A étant semi-stable, la flèche $A \rightarrow \mathcal{A}$ prolongeant l'application identique $A_\eta \rightarrow A_\eta$ est une immersion ouverte, et induit un isomorphisme entre les composantes neutres (voir [BLR], §7.4, prop. 3). Par suite, nous identifions A à un sous-groupe ouvert de \mathcal{A} . Soit $\Phi := \mathcal{A}/\mathcal{A}^\circ$ le groupe des composantes de \mathcal{A} . Alors il existe un sous-faisceau Γ de Φ tel que A soit l'image réciproque de Γ par la surjection canonique $\mathcal{A} \rightarrow \Phi$. Nous adopterons donc la notation usuelle $A = \mathcal{A}^\Gamma$.

Soit à présent A_η^t la variété abélienne duale de A_η , et soit \mathcal{A}^t son modèle de Néron, alors $(\mathcal{A}^t)_U = A_U^t$ est le schéma abélien dual de A_U , ce qui est consistant avec les notations

précédentes. Nous allons voir comment la théorie des biextensions permet d'établir un lien entre le faisceau $\underline{\text{Ext}}_S^1(A, \mathbf{G}_m)$ et le schéma \mathcal{A}^t .

On sait que la dualité entre A_η et A_η^t découle de l'existence d'un fibré en droites \mathcal{P}_η sur $A_\eta \times_K A_\eta^t$, que l'on appelle fibré de Poincaré. Cependant nous envisageons ici la dualité dans un cadre plus général à l'aide de la notion de biextension, introduite par Mumford dans [Mu]. Pour une définition précise de cette notion nous renvoyons le lecteur aux exposés de Grothendieck ([SGA 7], exposé VII) et de Milne ([Mi], Appendix C).

Grâce au théorème du carré, on peut munir le fibré de Poincaré \mathcal{P}_η d'une unique structure de biextension de (A_η, A_η^t) par $\mathbf{G}_{m,K}$, que l'on appelle la biextension de Weil, et que l'on note W_η . Une question naturelle se pose : W_η se prolonge-t-elle en une biextension sur les modèles de Néron ?

L'accouplement (dit « de monodromie ») introduit par Grothendieck dans [SGA 7] nous donne la réponse.

Plus précisément, soit Φ' le groupe des composantes de \mathcal{A}^t . On déduit de la lecture de ([SGA 7], exposé VIII, théorème 7.1, b)) un accouplement (associé à W_η)

$$\Phi \times_S \Phi' \longrightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S.$$

Signalons ici que, \mathcal{A} étant semi-stable, cet accouplement est non dégénéré (voir [SGA 7], exposé IX, théorème 11.5 ; on pourra également consulter [We] pour la propriété de compatibilité laissée au lecteur par Grothendieck). Le problème de prolongement est alors résumé par la proposition qui suit.

Proposition 2.4. *Soit M (resp. M') un sous-groupe de Φ (resp. Φ'). Alors il existe une (unique) biextension W de $(\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^{t,M'})$ par \mathbf{G}_m prolongeant la biextension de Weil W_η sur (A_η, A_η^t) si et seulement si M et M' sont orthogonaux sous l'accouplement.*

Démonstration. Le résultat découle de ([SGA 7], exposé VIII, théorème 7.1, b)) dans le cas particulier où la base est un trait. En outre, après lecture de ([SGA 7], exposé VIII, remarque 7.2), on voit que ce résultat s'étend au spectre d'un anneau de Dedekind, ce qui est bien le cas ici. \square

Notations 2.5. Soit X une biextension de $(\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^{t,M'})$ par \mathbf{G}_m . Nous noterons $t(X)$ le \mathbf{G}_m -torseur sous-jacent à la biextension X .

Nous noterons Γ' l'orthogonal de Γ sous l'accouplement de monodromie, et W l'unique biextension de $(\mathcal{A}^\Gamma, \mathcal{A}^{t,\Gamma'})$ par \mathbf{G}_m prolongeant W_η . Alors W définit un morphisme de faisceaux

$$\alpha : \mathcal{A}^{t,\Gamma'} \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m).$$

Nous noterons γ le morphisme induit par α sur les S -sections.

On note \mathcal{B} le modèle de Néron de la variété abélienne B_η , et Ψ le groupe des composantes de \mathcal{B} . Alors (voir [BLR], §7.4, prop. 3) B s'identifie à un sous-groupe ouvert de \mathcal{B} . Nous noterons donc $B = \mathcal{B}^\Lambda$, où Λ est le groupe des composantes de B , identifié à un sous-faisceau de Ψ . Soit B_η^t la variété abélienne duale de B_η , soit \mathcal{B}^t son modèle de Néron, et soit $\varphi^t : \mathcal{B}^t \rightarrow \mathcal{A}^t$ l'unique morphisme prolongeant l'isogénie duale de φ_η .

Soit W'_η la biextension de Weil sur (B_η, B_η^t) . Alors les biextensions $(\varphi_\eta \times \text{id}_{B_\eta^t})^*(W'_\eta)$ et $(\text{id}_{A_\eta} \times \varphi_\eta^t)^*(W_\eta)$ sont isomorphes sur (A_η, B_η^t) .

Notons à présent $\overline{\varphi} : \Phi \rightarrow \Psi$ (resp. $\overline{\varphi}^t : \Psi' \rightarrow \Phi'$) le morphisme induit par φ (resp. φ^t) sur les groupes de composantes respectifs. On constate que Λ n'est autre que Γ/\overline{G} , où \overline{G} est l'image de G dans Φ . Par suite, nous avons $\Lambda = \overline{\varphi}(\Gamma)$. Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Phi \times_S \Phi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \\ \overline{\varphi} \downarrow & \uparrow \overline{\varphi}^t & \parallel \\ \Psi \times_S \Psi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \end{array}$$

dans lequel on note $\langle, \rangle_{\mathcal{A}}$ l'accouplement du haut (associé à W_η), et $\langle, \rangle_{\mathcal{B}}$ l'accouplement du bas (associé à W'_η). Il résulte alors de ([SGA 7], exposé VIII, 7.3.1) et de l'identité $(\varphi_\eta \times \text{id}_{B_\eta^t})^*(W'_\eta) = (\text{id}_{A_\eta} \times \varphi_\eta^t)^*(W_\eta)$ que le diagramme précédent est commutatif, c'est-à-dire que nous avons, pour tout $x \in \Phi$ et tout $y \in \Psi'$, l'égalité

$$\langle \overline{\varphi}(x), y \rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, \overline{\varphi}^t(y) \rangle_{\mathcal{A}} .$$

On rappelle que Γ' est l'orthogonal de Γ sous l'accouplement $\langle, \rangle_{\mathcal{A}}$. L'identité précédente permet alors de montrer que l'orthogonal de $\overline{\varphi}(\Gamma)$ sous l'accouplement $\langle, \rangle_{\mathcal{B}}$ est égal à $(\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$. Ainsi, l'orthogonal Λ' de Λ est donné par : $\Lambda' = (\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$. Il est alors commode d'introduire les notations suivantes :

Notations 2.6. On note ${}^\varphi\Gamma'$ le sous-groupe de Φ' défini par

$${}^\varphi\Gamma' = \overline{\varphi}^t((\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')) = \overline{\varphi}^t(\Lambda')$$

de sorte que $\mathcal{A}^{t, {}^\varphi\Gamma'}$ est l'image de $\mathcal{B}^{t, \Lambda'}$ par φ^t .

Remarque 2.7. Il est clair que ${}^\varphi\Gamma'$ est un sous-groupe de Γ' , donc Γ et ${}^\varphi\Gamma'$ sont orthogonaux. Dans le cas particulier où $\ker(\varphi^t)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}^{t, \circ}$, on a l'égalité ${}^\varphi\Gamma' = \Gamma'$. Dans le cas où Γ' est nul, il est clair que ${}^\varphi\Gamma'$ l'est également. Pour un exemple où ${}^\varphi\Gamma' \neq \Gamma'$, nous renvoyons à la remarque 3.7.

Soit W' la biextension sur $(\mathcal{B}^\Lambda, \mathcal{B}^{t, \Lambda'})$ prolongeant W'_η dont l'existence est assurée par la proposition 2.4, et soit $\beta : \mathcal{B}^{t, \Lambda'} \rightarrow \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{B}^\Lambda, \mathbf{G}_m)$ le morphisme de faisceaux correspondant. Pour résumer la situation, nous avons un diagramme commutatif à lignes exactes

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \varphi^t & \longrightarrow & \mathcal{B}^{t, \Lambda'} & \xrightarrow{\varphi^t} & \mathcal{A}^{t, {}^\varphi\Gamma'} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{B}^\Lambda, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\varphi^*} & \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel la suite du bas n'est autre que la suite (2), et où $\ker \varphi^t$ est le noyau de $\varphi^t : \mathcal{B}^t \rightarrow \mathcal{A}^t$, en plus d'être le noyau de la restriction de φ^t à $\mathcal{B}^{t, \Lambda'}$. Ce dernier fait découle aisément de l'égalité $\Lambda' = (\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$ combinée au lemme du serpent.

2.3. Sur les groupes quasi-finis. En fait, notre groupe G est affine. De façon plus générale, nous pouvons énoncer la proposition suivante, annoncée en premier par Raynaud (voir [An], chap. II, prop. 2.3.1). La démonstration dépend crucialement du fait que la base S est un schéma noethérien de dimension ≤ 1 .

Proposition 2.8. *Soit G un S -schéma en groupes, de type fini, plat, séparé sur S , à fibre générique affine. Alors G est affine.*

Sous les hypothèses précédentes, nous pouvons donc écrire $G = \text{Spec}(\mathcal{H})$, où \mathcal{H} est une R -algèbre de Hopf fidèlement plate. Il est clair que \mathcal{H} est de type fini en tant que R -algèbre. Par contre, il est faux en général que \mathcal{H} soit de type fini en tant que R -module. En effet, cette propriété équivaut au fait que G soit fini sur S .

3. INVARIANT DE PICARD ET HOMOMORPHISME DE CLASSES

Nous commençons par généraliser une construction due à W. Waterhouse (voir [W], section 2). Puis nous définissons un homomorphisme de classes ψ qui généralise les constructions précédentes ([T88], [P], [G]). Nous suivons ici une démarche semblable à celle de [G], en abrégant certains détails.

3.1. L'invariant de Picard. Soit G un S -schéma en groupes commutatif. Nous disposons d'une suite exacte de groupes abéliens (déduite de la suite spectrale locale-globale pour les Ext (voir [SGA 4], exposé V, proposition 6.3, 3))

$$(4) \quad H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \xrightarrow{\nu} \text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}_S^1(G, \mathbf{G}_m)(S)$$

où le morphisme ν est injectif. Si l'on suppose en outre que G est quasi-fini, plat et séparé sur S , alors $\underline{\text{Ext}}_S^1(G, \mathbf{G}_m) = 0$ d'après le lemme 2.3, donc ν est bijectif. Nous donnons alors la construction explicite d'une flèche

$$\rho : \text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m))$$

telle que $\rho \circ \nu = \text{id}$. Nous obtiendrons ainsi (voir le théorème 3.1) un analogue, dans le cas quasi-fini, du Theorem 2' de [W].

On suppose à présent que G est quasi-fini, plat et séparé sur S . Définissons ρ : soit une extension $\Omega \in \text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m)$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \Omega \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0.$$

Elle donne lieu, par application du foncteur $\underline{\text{Hom}}_S(G, -)$, à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(G, \Omega) \xrightarrow{g \circ -} \underline{\text{Hom}}_S(G, G) \longrightarrow 0.$$

On obtient ainsi un morphisme

$$\underline{\delta} : \text{Hom}(G, G) \rightarrow H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)).$$

On note alors $\rho(\Omega)$ le $\underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)$ -torseur $\underline{\delta}(\text{id}_G)$. Autrement dit, $\rho(\Omega)$ est le faisceau des sections $s : G \rightarrow \Omega$, au sens de la théorie des extensions. On vérifie qu'on définit ainsi un morphisme de groupes ρ . En résumé, nous avons :

Théorème 3.1. *On suppose que G est quasi-fini, plat et séparé sur S . Alors l'application ρ définie ci-dessus induit un isomorphisme*

$$\text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) \simeq H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)).$$

L'isomorphisme inverse ρ^{-1} est égal à la flèche ν de la suite (4).

En composant ν avec le morphisme naturel $l : \text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) \rightarrow \text{Pic}(G)$, on obtient un homomorphisme

$$\pi : H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \longrightarrow \text{Pic}(G).$$

Dans le cas où G est fini et plat, notre π coïncide avec l'homomorphisme défini par Waterhouse (voir [W], Theorem 5). En effet, dans ce cadre, $\underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)$ est le dual de Cartier G^D de G . D'autre part, G^D étant fini et plat, un argument de descente montre que le groupe $H^1(S, G^D)$ reste inchangé, qu'il soit calculé dans le petit site fppf, le gros site fppf, ou le gros site fpqc.

3.2. Définition et propriétés de l'homomorphisme. Le résultat qui suit est démontré dans [G] comme application du lemme 2.2.

Lemme 3.2. *Soit Y un S -schéma en groupes plat, dont la fibre générique Y_η est une variété abélienne. Alors $\underline{\text{Ext}}_S^1(Y, \mathbf{G}_m)$ est isomorphe au faisceau $T \mapsto \text{Ext}^1(Y_T, \mathbf{G}_{m,T})$.*

Reprenons les notations du paragraphe 2.2. Soit E une extension de \mathcal{A}^Γ par \mathbf{G}_m . On associe à E le $\underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)$ -torseur $\delta(E)$. Le lemme 3.2 permet de décrire $\delta(E)$ comme étant le faisceau des extensions Θ de \mathcal{B}^Λ par \mathbf{G}_m telles que $\varphi^*\Theta = E$.

D'autre part, en considérant le morphisme $i : G \rightarrow \mathcal{A}^\Gamma$, on peut associer à E une extension i^*E de G par \mathbf{G}_m , puis un $\underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)$ -torseur $\rho(i^*E)$. On peut décrire $\rho(i^*E)$ comme étant le faisceau des sections de i^*E .

Or la donnée d'une section de i^*E équivaut à la donnée d'une extension Θ de \mathcal{A}^Γ par \mathbf{G}_m telle que $\varphi^*\Theta = E$. On en déduit le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma) & \xleftarrow{l^1} & \text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \\ \downarrow & & i^* \downarrow & & \parallel \\ \text{Pic}(G) & \xleftarrow{l} & \text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\rho} & H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \end{array}$$

est commutatif, où l^1 est le morphisme naturel $\text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma)$.

On déduit du lemme 3.3 le diagramme commutatif :

$$(5) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^{t, \Gamma'}(S) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \\ & & \downarrow l^1 & & \downarrow \pi \\ & & \text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma) & \longrightarrow & \text{Pic}(G) \end{array}$$

et on définit l'homomorphisme $\psi : \mathcal{A}^{t, \Gamma'}(S) \rightarrow \text{Pic}(G)$ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) comme étant le composé de ces morphismes.

Remarque 3.4. Soit \mathcal{D} l'application obtenue en composant les flèches suivantes

$$\mathcal{D} : \mathcal{A}^{t, \Gamma'}(S) \xrightarrow{\gamma} \text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{l^1} \text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma).$$

Le diagramme (5) montre que, pour tout p , $\psi(p)$ est la restriction de $\mathcal{D}(p)$ à G , que nous noterons $\mathcal{D}(p)|_G$. Ceci généralise la description géométrique de ψ (obtenue par Agboola [A1] dans le cas où \mathcal{A} est un schéma abélien).

D'autre part, soit $p \in \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$, nous avons alors

$$\mathcal{D}(p) = l^1((\text{id}_{\mathcal{A}^\Gamma} \times p)^*(W)) = (\text{id}_{\mathcal{A}^\Gamma} \times p)^*(t(W)),$$

d'où, en notant $i : G \rightarrow \mathcal{A}^\Gamma$ l'inclusion,

$$\mathcal{D}(p)|_G = (i \times p)^*(t(W)).$$

Remarque 3.5. Supposons que G soit un S -schéma en groupes fini et plat. Alors l'homomorphisme ψ associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}$ coïncide avec l'homomorphisme de classes de $[G]$, en considérant (avec les notations de $[G]$) les schémas en groupes semi-stables $A = \mathcal{A}$ et $A' = \mathcal{A}^{t,\circ}$. Si de plus G est contenu dans \mathcal{A}° , alors l'homomorphisme ψ associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\circ$ est l'homomorphisme de $[G]$ pour $A = \mathcal{A}^\circ$ et $A' = \mathcal{A}^t$.

Proposition 3.6. *Soit $p \in \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$ et soit N un entier premier à l'ordre de G_η . Alors $\mathcal{D}(p)|_G = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}(Np)|_G = 0$. En particulier, $\mathcal{D}(p)|_G = 0$ si p est un point de N -torsion.*

Démonstration. Soit m l'ordre de G_η , alors G_η est tué par m . De même le groupe G , qui est l'adhérence schématique de G_η dans \mathcal{A}^Γ , est tué par m . Par suite, la multiplication par m dans le groupe $\text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m)$, induite par la multiplication par m dans G , est l'application nulle. Les entiers m et N étant premiers entre eux, la multiplication par N est donc un automorphisme du groupe $\text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m)$. Or nous pouvons écrire

$$\mathcal{D}(p)|_G = l((i \times p)^*(W)).$$

Autrement dit, l'homomorphisme $p \mapsto \mathcal{D}(p)|_G$ se factorise à travers le groupe $\text{Ext}^1(G, \mathbf{G}_m)$. On en déduit aisément le résultat. \square

3.3. Cas particulier : suite de Kummer. Un premier avantage de notre construction est de pouvoir traiter le cas kummérien, qui était l'approche originale dans [T88].

On fixe à présent un entier naturel $n > 0$, et on note $n\Gamma$ l'image de la multiplication par n dans le groupe Γ . Alors (voir [SGA 7], exposé IX, 2.2.1), \mathcal{A} étant semi-stable, le morphisme $[n] : \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{A}^\circ$ est plat, surjectif, et quasi-fini. En appliquant le lemme du serpent nous en déduisons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\Gamma[n] \longrightarrow \mathcal{A}^\Gamma \xrightarrow{[n]} \mathcal{A}^{n\Gamma} \longrightarrow 0$$

de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S . Il s'ensuit, d'après les considérations faites au début du paragraphe 2.1, que $\mathcal{A}^\Gamma[n]$ est un sous- S -schéma en groupes fermé, quasi-fini et plat de \mathcal{A}^Γ .

D'autre part, l'accouplement de monodromie étant non dégénéré, l'orthogonal de $n\Gamma$ n'est autre que $n^{-1}\Gamma'$, c'est-à-dire l'image réciproque par la multiplication par n du sous-groupe Γ' de Φ' . On peut résumer la situation par le diagramme (à lignes exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^t[n] & \longrightarrow & \mathcal{A}^{t,n^{-1}\Gamma'} & \xrightarrow{[n]} & \mathcal{A}^{t,n\Gamma'} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{A}^{n\Gamma}, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{[n]} & \underline{\text{Ext}}_S^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

(voir le paragraphe 2.2). Ici nous avons noté ${}^n\Gamma'$ le groupe $n(n^{-1}\Gamma')$, en accord avec les notations 2.6. Les lignes horizontales de ce diagramme sont deux prolongements de la suite exacte de Kummer pour le U -schéma abélien \mathcal{A}_U^t .

Remarque 3.7. Supposons que le groupe Φ' soit non nul et tué par l'entier n . Posons $\Gamma = 0$, alors $\Gamma' = \Phi'$ donc ${}^n\Gamma' = {}^n\Phi' = n\Phi' = 0$. Par suite, ${}^n\Gamma'$ est distinct de Γ' . Dans l'exemple 5.3 on explicite également un cas pour lequel $\mathcal{A}^{t,n\Phi'}(S) \neq \mathcal{A}^t(S)$.

Par application du foncteur des sections globales, on obtient un diagramme commutatif entre les (longues) suites exactes de cohomologie associées, qui s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \mathcal{A}^{t,n^{-1}\Gamma'} & \xrightarrow{[n]} & \mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S) & \xrightarrow{\partial} & H^1(S, \mathcal{A}^t[n]) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow h_* & \\ \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{A}^{n\Gamma}, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{[n]} & \text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_m)) & \longrightarrow \end{array}$$

où ∂ est l'homomorphisme cobord.

La commutativité du carré à droite se traduit alors de la façon suivante : soit p dans $\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$, notons $[n]^{-1}(p) := \partial(p)$ le $\mathcal{A}^t[n]$ -torseur obtenu en divisant le point p par $[n]$ dans le faisceau \mathcal{A}^t . Alors le torseur $(\delta \circ \gamma)(p)$ est le torseur $[n]^{-1}(p)$ auquel on a fait subir un changement de groupe structural via la flèche $h : \mathcal{A}^t[n] \rightarrow \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_m)$.

Remarque 3.8. Si les groupes $\mathcal{A}^\Gamma[n]$ et $\mathcal{A}^t[n]$ sont tous les deux finis sur S , alors ils sont duaux l'un de l'autre au sens de Cartier, donc $h : \mathcal{A}^t[n] \rightarrow \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_m)$ est un isomorphisme. On peut alors identifier les torseurs $[n]^{-1}(p)$ et $(\delta \circ \gamma)(p)$. Ceci se produit en particulier lorsque \mathcal{A} a partout bonne réduction.

Soit ψ_n l'homomorphisme de classes associé à l'inclusion $\mathcal{A}^\Gamma[n] \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$. La discussion précédente montre que la restriction de ψ_n au sous-groupe $\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$ de $\mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$ coïncide avec le morphisme obtenu par composition des flèches suivantes :

$$\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S) \xrightarrow{\partial} H^1(S, \mathcal{A}^t[n]) \xrightarrow{h_*} H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_m)) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma[n]).$$

Autrement dit, pour tout $p \in \mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$, l'invariant $\psi_n(p)$ étudie la structure galoisienne du $\mathcal{A}^t[n]$ -torseur $[n]^{-1}(p)$ dans le groupe $\text{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma[n])$. La seule différence avec l'approche originale est que l'on fait d'abord subir au torseur $[n]^{-1}(p)$ un changement de groupe structural.

Remarque 3.9. Dans le cas général, la suite exacte (3) permet de donner une interprétation analogue de ψ . Nous avons préféré nous limiter ici au cas kummérien afin d'explicitier un peu mieux les objets entrant en jeu.

Remarque 3.10. Supposons que \mathcal{E} soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique semi-stable, n'ayant pas partout bonne réduction, et soit $m > 1$ un entier naturel. Si v est une place de bonne réduction, alors \mathcal{E}_v° est une courbe elliptique, donc $\mathcal{E}_v^\circ[m]$ est un k_v -schéma en groupes fini de rang m^2 . Par contre, si v est une place de mauvaise réduction, alors \mathcal{E}_v° est une forme tordue de \mathbf{G}_m sur k_v , donc $\mathcal{E}_v^\circ[m]$ est un k_v -schéma en groupes fini de rang m . Par suite, $\mathcal{E}^\circ[m]$ n'est pas de rang constant sur S , donc n'est pas fini sur S .

De plus, si m est premier aux ordres des groupes des composantes des fibres de \mathcal{E} , alors $\mathcal{E}^\circ[m] = \mathcal{E}[m]$, donc $\mathcal{E}[m]$ n'est pas fini non plus. Sous cet éclairage, les entiers m tels que

$\mathcal{E}[m]$ soit fini sont exceptionnels. Signalons cependant que deux critères de finitude pour $\mathcal{E}[m]$ sont rappelés dans le paragraphe 3.4 de [G].

4. RAFFINEMENT PAR LA THÉORIE D'ARAKELOV

Dans toute cette section, nous supposons que K est un corps de nombres et que R est l'anneau des entiers de K . Nous fixons en outre un ensemble fini \mathfrak{S} de places de K , contenant toutes les places infinies de K .

Soit X un S -schéma. Un fibré inversible métrisé sur X (relativement à \mathfrak{S}) est un fibré en droites \mathcal{L} muni d'une métrique en chacune des places de \mathfrak{S} . L'ensemble des classes d'isomorphie de tels objets forme un groupe (l'opération étant induite par le produit tensoriel), noté $\widehat{\text{Pic}}(X)$. On dispose bien sûr d'un homomorphisme naturel

$$\widehat{\text{Pic}}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$$

qui consiste à oublier les métriques sur \mathcal{L} .

Soit H un S -schéma en groupes, tel que, pour toute place $v \in \mathfrak{S}$, le groupe $H(\overline{K}_v)$ soit réunion filtrante de sous-groupes compacts. Fixons une extension $\Omega \in \text{Ext}^1(H, \mathbf{G}_m)$. Nous avons une suite exacte (pour la topologie fppf) :

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \Omega \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Soit $v \in \mathfrak{S}$. Le corps \overline{K}_v étant algébriquement clos, il en résulte une suite exacte de groupes abéliens ordinaires

$$0 \longrightarrow \overline{K}_v^* \longrightarrow \Omega(\overline{K}_v) \longrightarrow H(\overline{K}_v) \longrightarrow 0.$$

La valeur absolue v -adique peut-être vue comme un homomorphisme continu $\overline{K}_v^* \rightarrow \mathbb{R}$ (ici \mathbb{R} est considéré en tant que groupe additif). On déduit donc de notre extension une extension (de groupes topologiques) de $H(\overline{K}_v)$ par \mathbb{R} . Une métrique sur (le fibré inversible associé à) $\Omega_{\overline{K}_v}$ est la même chose qu'une trivialisatoin du tore sous-jacent à cette extension. Mais on sait que $\text{Hom}(H(\overline{K}_v), \mathbb{R}) = \text{Ext}^1(H(\overline{K}_v), \mathbb{R}) = 0$, le groupe $H(\overline{K}_v)$ étant réunion filtrante de sous-groupes compacts. On en déduit donc une trivialisatoin canonique de l'extension en question, d'où une métrique canonique sur $\Omega_{\overline{K}_v}$.

Ainsi le fibré naturellement associé à Ω se retrouve muni d'une métrique. On définit ainsi un morphisme

$$\text{Ext}^1(H, \mathbf{G}_m) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(H)$$

qui relève l'homomorphisme naturel (nous le noterons \hat{l} dans le cas où $H = G$, et \hat{l}^1 dans le cas où $H = \mathcal{A}^\Gamma$). On obtient, en composant ν avec \hat{l} , un morphisme

$$\hat{\pi} : H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(G)$$

qui relève l'homomorphisme π (défini dans le paragraphe 3.1). On pourra consulter ([A-P], section 2) pour plus de détails.

A l'aide du lemme 3.3, on vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{t, \Gamma'}(S) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\delta} H^1(S, \underline{\text{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_m)) \\ \hat{l}^1 \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\Gamma) & \longrightarrow & \widehat{\text{Pic}}(G) \end{array}$$

et on définit l'homomorphisme $\hat{\psi} : \mathcal{A}^{t, \Gamma'}(S) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(G)$ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) comme étant le composé de ces morphismes. Il est clair que $\hat{\psi}$ est un relèvement de ψ .

5. APPLICATIONS

En guise d'applications de notre construction, nous allons à présent démontrer les théorèmes 1.1 et 1.3 de l'introduction.

5.1. Résultat d'annulation sur les points de torsion. Le résultat suivant est une reformulation du théorème 4.1 de [G]. Signalons au passage que sa démonstration utilise l'hypothèse d'excellence de R .

Théorème 5.1. *Supposons que $\mathcal{E} \rightarrow S$ soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K . Soit n un entier premier à 6. Alors la restriction du \mathbf{G}_m -torseur $t(W)$ au sous-groupe $\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]$ est triviale.*

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant (généralisant les théorèmes d'annulation précédemment obtenus) :

Corollaire 5.2. *Soit \mathcal{E} soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K . Soit G (resp. H) un sous-groupe quasi-fini et fermé de \mathcal{E}° (resp. \mathcal{E}). Soit*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E}^t(S) &\longrightarrow \text{Pic}(G) \\ \text{resp. } \psi' : \mathcal{E}^{t, \circ}(S) &\longrightarrow \text{Pic}(H) \end{aligned}$$

le morphisme associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{E}^\circ$ (resp. $H \subseteq \mathcal{E}$). Si l'ordre de G_η (resp. de H_η) est premier à 6, alors ψ (resp. ψ') s'annule sur les points de torsion.

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{E}^t(S)$ un point de m -torsion. On peut écrire $m = nN$ où N est premier à l'ordre de G_η , et l'ensemble des facteurs premiers de n est un sous-ensemble de l'ensemble des facteurs premiers de l'ordre de G_η . Alors Np est un point de n -torsion et, d'après la proposition 3.6, il suffit de montrer la nullité de $\mathcal{D}(Np)|_G$ pour en déduire celle de $\mathcal{D}(p)|_G$.

D'autre part, G est un sous-groupe de $\mathcal{E}^\circ[n]$ (car G est tué par l'ordre de G_η), et Np se factorise à travers $\mathcal{E}^t[n]$. On peut alors écrire (cf. la remarque 3.4)

$$\mathcal{D}(Np)|_G = (i \times Np)^*(t(W)|_{\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]}).$$

Ainsi, pour montrer que $\mathcal{D}(p)|_G$ est nul, il suffit de montrer que la restriction de $t(W)$ à $\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]$ est triviale, ce qui est bien le cas d'après le théorème 5.1. On en déduit le résultat d'annulation de ψ , sachant que $\psi(p) = \mathcal{D}(p)|_G$ pour tout $p \in \mathcal{E}^t(S)$. Le résultat d'annulation de ψ' se démontre de la même façon. \square

Il est clair que le corollaire 5.2 implique le théorème 1.1.

Exemple 5.3. Soit E_L une courbe elliptique semi-stable sur un corps de nombres L , on suppose que E_L a réduction torique en au moins une place v_L de \mathcal{O}_L . On fixe un nombre premier $N \neq 2, 3$ ne divisant pas l'ordre du groupe des composantes de la fibre en v_L du modèle de Néron de E_L , et tel que v_L ne divise pas N .

Soit $K = L(E_L[N])$, soit $\mathcal{E} \rightarrow S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ le modèle de Néron de la K -courbe elliptique $E_L \times_L K$, et soit v une place de K divisant v_L . Alors $\mathcal{E}[N]$ est fini et plat de

rang N^2 sur S , donc le groupe Φ_v des composantes de \mathcal{E}_v est cyclique d'ordre divisible par N , d'après la remarque 3.10.

Soit j le j -invariant de la courbe E_L . Alors l'ordre du groupe des composantes de la fibre en v_L du modèle de Néron de E_L est égal à $-v_L(j)$ (ici, la valuation v_L est normalisée de façon à prendre la valeur 1 sur une uniformisante). De même, l'ordre du groupe des composantes de la fibre de \mathcal{E} en v est égal à $-v(j)$. De plus, $v(j) = e(K/L)v_L(j)$ où $e(K/L)$ est l'indice de ramification de K/L . Sachant que $e(K/L)$ divise l'ordre du groupe de Galois de K/L , lequel est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, on en déduit que N^2 ne divise pas $e(K/L)$.

Ainsi le groupe Φ_v est cyclique d'ordre Nk , avec k premier à N . On peut alors choisir un point $p_1 \in \mathcal{E}(S)$ d'ordre N qui ne se réduise pas dans $\mathcal{E}_v^\circ(k_v)$. Il est alors clair que le point p_1 n'appartient pas à $\mathcal{E}^{N\Phi}(S)$.

Rappelons que, par auto-dualité des courbes elliptiques, on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^t$. Soit $\psi_N : \mathcal{E}(S) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{E}^\circ[N])$ l'homomorphisme associé à l'inclusion $\mathcal{E}^\circ[N] \subseteq \mathcal{E}^\circ$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}[N] \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{[N]} \mathcal{E}^{N\Phi} \longrightarrow 0.$$

D'après le paragraphe 3.3, la restriction de l'homomorphisme ψ_N à $\mathcal{E}^{N\Phi}(S)$ étudie la structure galoisienne des $\mathcal{E}[N]$ -torseurs obtenus grâce au cobord de cette suite exacte.

Cependant, on constate ici que notre construction de ψ_N permet également l'étude de toseurs qui ne proviennent pas du cobord cette suite exacte. En effet, le point p_1 donne naissance à un $\underline{\text{Hom}}_S(\mathcal{E}^\circ[N], \mathbf{G}_m)$ -torseur $\delta(p_1)$, dont la structure galoisienne est triviale d'après le corollaire 5.2, et pourtant $p_1 \notin \mathcal{E}^{N\Phi}(S)$.

5.2. Résultat d'injectivité. On suppose à présent que K est un corps de nombres, et que R est l'anneau des entiers de K .

Dans la suite, le groupe $\widehat{\text{Pic}}$ sera relatif à l'ensemble \mathfrak{S} formé des places de mauvaise réduction de \mathcal{A} ainsi que les places infinies de K .

Soit ℓ un nombre premier. Alors, pour tout entier n , nous disposons d'un homomorphisme $\hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$. D'autre part, l'inclusion $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] \rightarrow \mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]$ donne lieu à une flèche de restriction $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^{n+1}}} & \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^n}} & \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]). \end{array}$$

On obtient ainsi, par passage à la limite (projective), un homomorphisme

$$\hat{\Psi}_\ell = \varprojlim \hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \varprojlim \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]).$$

On peut de même définir, pour le U -schéma abélien A_U , un morphisme analogue, que nous noterons $\hat{\Psi}_{U,\ell}$. Ce dernier coïncide avec le morphisme défini par Agboola et Pappas dans [A-P]. Nous pouvons énoncer pour $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ le résultat suivant (voir [A-P], Theorem 6.4 et Theorem 1.2) :

Théorème 5.4. (*Agboola-Pappas*). *L'homomorphisme $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ est injectif modulo les points de torsion. En outre, si tous les points de S de caractéristique ℓ sont contenus dans U , et si ℓ ne divise pas $6 \cdot \text{disc}(K/\mathbb{Q})$, alors $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ est injectif.*

Démonstration du théorème 1.3. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^n}} & \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]) \\ \downarrow & & \downarrow j^* \\ A_U^t(U) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{U,\ell^n}} & \widehat{\text{Pic}}(A_U[\ell^n]). \end{array}$$

Ainsi, par passage à la limite, la composée de $\hat{\Psi}_\ell$ avec le morphisme naturel

$$\varprojlim \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]) \longrightarrow \varprojlim \widehat{\text{Pic}}(A_U[\ell^n])$$

est égale au morphisme $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ défini plus haut. En particulier, tout résultat d'injectivité portant sur $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ donne lieu au même résultat pour $\hat{\Psi}_\ell$. Ainsi le théorème 5.4 entraîne le théorème 1.3. \square

RÉFÉRENCES

- [A1] A. AGBOOLA, *A geometric description of the class invariant homomorphism*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 273–280.
- [A2] ———, *Torsion points on elliptic curves and Galois module structure*, Invent. Math. **123** (1996), 105–122.
- [A-P] A. AGBOOLA and G. PAPPAS, *On arithmetic class invariants*, Math. Ann. **320** (2001), 339–365.
- [A-T] A. AGBOOLA and M. J. TAYLOR, *Class invariants of Mordell-Weil groups*, J. Reine Angew. Math. **447** (1994), 23–61.
- [An] S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Bull. Soc. Math. Fr., Suppl., Mém. **33** (1973), 5–79.
- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMER and M. RAYNAUD, *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).
- [CN-T] P. CASSOU-NOGUÈS et M. J. TAYLOR, *Structures galoisiennes et courbes elliptiques*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 307–331.
- [G] J. GILLIBERT, *Invariants de classes : le cas semi-stable*, Compositio Mathematica **141** (2005), 887–901.
- [SGA 4] A. GROTHENDIECK, M. ARTIN et J. L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vols 269, 270 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).
- [SGA 7] A. GROTHENDIECK, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 288 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).
- [Mi] J. S. MILNE, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1 (Academic Press, Boston, MA, 1986).
- [Mu] D. MUMFORD, *Bi-extensions of formal groups*, in *Algebraic Geometry* (Bombay, 1968), (Oxford University Press, 1969), 307–322.
- [P] G. PAPPAS, *On torsion line bundles and torsion points on abelian varieties*, Duke Math. J. **91** (1998), 215–224.
- [S-T] A. SRIVASTAV and M. J. TAYLOR, *Elliptic curves with complex multiplication and Galois module structure*, Invent. Math. **99** (1990), 165–184.

- [T88] M. J. TAYLOR, *Mordell-Weil groups and the Galois module structure of rings of integers*, Illinois J. Math. **32** (1988), 428–452.
- [T91] M. J. TAYLOR, *L-functions and Galois modules : Explicit Galois Modules*, in *L-functions and Arithmetic*, LMS Lecture Notes, vol. 153 (Cambridge University Press, 1991).
- [W] W. C. WATERHOUSE, *Principal homogeneous spaces and group scheme extensions*, Trans. Am. Math. Soc. **153** (1971), 181–189.
- [We] A. WERNER, *On Grothendieck's pairing of component groups in the semistable reduction case*, J. Reine Angew. Math. **486** (1997), 205–215.

UNIVERSITÉ DE CAEN, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES NICOLAS ORESME (CNRS UMR 6139),
BP 5186, 14032 CAEN CEDEX, FRANCE
E-mail address: jean.gillibert@math.unicaen.fr